Petits jeux de probabilités
(Solutions)

Christophe Lalanne

En famille

1. Mon voisin a deux enfants dont l'un est une fille, quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

   Une famille de deux enfants peut se représenter par (a_1, a_2) où a_i vaut f ou g suivant que le i-ème enfant est une fille ou un garçon. Tous les couples (a_1, a_2) sont équiprobables.
   Soit $\Omega = \{(f,g),(f,f),(g,g),(g,f)\}$.
   On sait qu'un enfant est une fille. On cherche $P(E|A)$ où $E = \{(f,g),(g,f),(g,g)\}$ et $A = \{(f,g),(f,f),(g,f)\}$, donc

   $$P(E|A) = \frac{2}{3}$$

   Source : M. Cottrell et al. *Exercices de probabilités*, Cassini, 1999.

2. Mon voisin a deux enfants dont l'aîné est un garçon, quelle est la probabilité pour que l'autre soit une fille ?

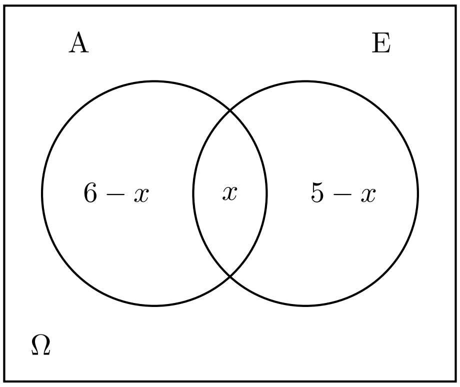
   En reprenant les mêmes notations que précédemment, on cherche $P(F|B)$ où $F = \{(g,g),(g,f)\}$ et $B = \{(f,f),(g,f)\}$, donc

   $$P(F|B) = \frac{1}{2}$$

   Source : *ibidem.*

3. Quand Adam et Ève se sont mariés, chacun d'eux avait déjà plusieurs enfants de mariages précédents. Au bout de quelques années, il y a 8 enfants dans leur maison : Adam est le père de 6 d'entre eux, Eve est la mère de 5. Combien d'enfants ont-ils eu ensemble ?

Si Adam et Ève n'avaient aucun enfant en commun, cela leur en ferait 11, soit 3 de plus que la réalité : ils ont donc eu 3 enfants ensemble.



Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

4. J'ai 7 enfants, c'est l'idéal, surtout lorsqu'on aime la statistique ! Pensez, l'âge modal est de 4 ans[1]. Marie-Amélie a précisément l'âge médian, 6 ans. Les jumeaux ont l'âge moyen : 7 ans. Vous en déduirez tout de suite l'âge de mon aîné Augustin-Charles. . .

Si l'âge modal est de 4 ans, alors que les jumeaux ont 7 ans, c'est que j'ai des triplets*. Soit x l'âge d'Augustin-Charles. Posons que la moyenne est de 7 ans :

$$\frac{4+4+4+6+7+7+x}{7} = 7$$

ou $x + 32 = 9$. Donc $x = 17$. Augustin-Charles a 17 ans.
* Je ne peux pas avoir des quadruplets puisque l'âge médian est de 6 ans.
Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

En société

1. On considère un ensemble de n menteurs. La première personne reçoit une information binaire, de la forme "oui" ou "non", et la transmet à son voisin avec une probabilité p. Ce voisin la transmet lui-même à un autre voisin, et ainsi de suite jusqu'à la dernière personne (les réponses des n personnes sont bien entendu considérées comme indépendantes).

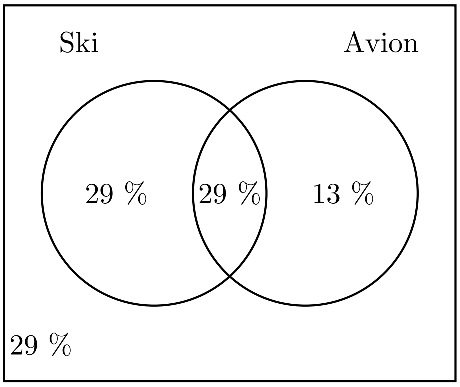
[1]On rappelle que le mode est l'observation la plus fréquemment observée.

Quelle est la probabilité que l'information soit fidèlement transmise, en particulier lorsque n tend vers l'infini ?

L'espace des épreuves Ω est l'ensemble de 2^n n-uplets $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ où, pour $i = 1, \ldots, n$, $w_i = +1$ si la i-ième personne transmet fidèlement l'information, $w_i = -1$ si la i-ième personne change l'information. La probabilité P sur Ω est déterminée par $$P((w_1, \ldots, w_n) = p(w_1) \ldots p(w_n)$$ avec $p(1) = p,\ p(-1) = 1 - p$. Posons – $A_i =$ « I_i transmet l'information initiale » ; – $B_i =$ « I_i transmet ce qu'il a entendu » ; – $p_i = P(A_i$ On a, pour $i = 2, \ldots, n,\ A_i = (A_{i-1} \cap B_i) \cup (A_{i-1}^c \cap B_i^c)$, réunion de deux événements disjoints. Donc : $p_i = P(A_{i-1} \cap B_i) + P(A_{i-1}^c \cap B_i^c)$. Comme les réponses sont indépendantes, on obtient, toujours pour $i = 2, \ldots, n$: $$p_i = p_{i-1}p + (1 - p_{i-1})(1 - p) = 1 - p + (2p - 1)p_{i-1}$$ et $$p_1 = P(A_1) = p$$ Suivant la méthode générale, on se ramène à une suite géométrique en soustrayant à p_i la solution de l'équation $x = 1 - p + (2p - 1)x$; on trouve $$p_n - \frac{1}{2} = (2p - 1)(p_{n1} - \frac{1}{2}) = \ \ldots\ = (2p - 1)^{n-1}(p_1 - \frac{1}{2})$$ d'où $$p_n = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}$$ Comme $2p - 1 \in] - 1, 1[$, on a $lim_{n \leftarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$.

2. Dans une certaine population, on constate que 42 % des individus n'ont jamais fait de ski, que 58 % n'ont jamais pris l'avion, mais que 29 % ont déjà fait du ski et pris l'avion. A-t-on alors plus de chances de rencontrer quelqu'un qui a déjà fait du ski parmi ceux qui n'ont jamais pris l'avion ou quelqu'un qui a déjà pris l'avion parmi ceux qui ont déjà fait du ski ?

Si 42 % n'ont jamais fait de ski, 58 % en ont déjà fait. Comme 29 % ont déjà fait du ski et pris l'avion, 29 % ont déjà fait du ski mais n'ont jamais pris l'avion. Comem 58 % n'ont jamais pris l'avion, le rapport de ceux qui ont déjà fait du ski et n'ont pas pris l'avion sur ceux qui n'ont jamais pris l'avion est de : $\frac{29}{58} = \frac{1}{2}$.
Tandis que le rapport de ceux qui ont pris l'avion et fait du ski sur ceux qui ont déjà fait du ski est de : $\frac{29}{58} = \frac{1}{2}$. Les deux probabilités sont donc égales.



Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

3. Dans un pays où il naît autant de garçons que de filles, le Dr ABC prévoit le sexe des enfants à naître. Il se trompe 1 fois sur 10 si c'est un garçon et 1 fois sur 20 seulement si c'est une fille. Aujourd'hui, il vient de dire à Mme XYZ qu'elle aurait une fille. Quelle est la probabilité pour que cela soit vrai ?

Le Dr ABC prévoit une fille dans 10 % des cas où l'enfant à naître est un garçon, et dans 95 % des cas où l'enfant à naître est réellement une fille. Sur 200 naissances, il annoncera ainsi 105 fois une fille, dont 95 fois avec exactitude.
La probabilité pour qu'il ne se trompe pas est alors de :

$$\frac{95}{105} = \frac{19}{21} = 90,5\ \%$$

Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

4. Pour accompagner un vol transatlantique, 20 hôtesses de l'air se présentent. 7 d'entre elles sont blondes, les autres sont brunes. Le sort en choisit 3 au hasard. Quelle est la probabilité de trouver parmi elles au moins une brune et au moins une blonde ?

Si l'on peut trouver au moins une brune et au moins une blonde, c'est que les 3 hôtesses choisies ne sont ni toutes trois brunes (probabilité $\frac{13\times12\times11}{20\times19\times18}$), ni toutes trois blondes (probabilité $\frac{7\times6\times5}{20\times19\times18}$). La probabilité demandée est donc : $1-\frac{13\times12\times11}{20\times19\times18}-\frac{7\times6\times5}{20\times19\times18}=0,718$.
Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

En classe

1. Un livre d'exercices pour la classe de première propose trente équations successives du type : $x^2+ax+b=0$ Sachant que les coefficients a et b sont des nombres quelconques inférieurs respectivement à 10 et à 25 en valeur absolue, quel est le nombre approximatif de ces équations qui admet des solutions ?

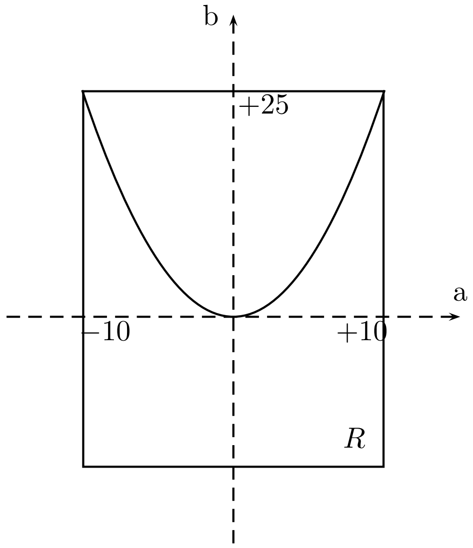
Pour qu'une équation admette des solutions, il faut que son déterminant soit positif :

$$a^2 - 4b > 0, \ soit \ b < \frac{a^2}{4}$$

Considérons ici le domaine des probabilités pour a et b (rectangle R sur le schéma). Si $b < 0$, l'inéquation est vérifiée. Elle l'est aussi (si $b > 0$) pour tous les couples (a, b) situés en-dessous de la parabole tracée sur le schéma.
La proportion de surface vérifiant l'inéquation vaut :

$$\frac{surface\ hachurée}{surface\ de\ R} = \frac{20 \times 25 + \int_{-10}^{+10} \frac{x^2}{4} dx}{50 \times 20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Les $\frac{2}{3}$ des équantions offrent donc des solutions. On peut donc s'attendre, dans l'exemple, à trouver à peu près 20 équations avec solutions.



Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

2. Soit un groupe de k personnes. On se propose de parier une certaine somme contre la même somme que deux d'entre elles ont le même anniversaire, i.e. le même jour et le même mois de naissance mais non nécessairement la même année. A partir de combien de personnes ce type de pari peut-il tourner en votre faveur ?

En jouant

1. Soit le jeu qui consiste à découvrir une carte donnée parmi trois cartes retournées. Après avoir décidé laquelle de ces trois cartes est selon vous

la carte recherchée, une tierce personne retourne une des trois cartes, celle-ci n'étant pas la carte recherchée bien entendu. Avez-vous intérêt à changer votre choix initial ?

2. Soit une séquence aléatoire de nombres compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces n valeurs ne figure au rang correspondant à sa valeur (e.g. le 2 ne figure pas en deuxième position, le 67 ne figure pas en soixante-septième position,etc.) ?

   L'énumération des *dérangements*, ou permutations sans points fixes, est un exercice classique de combinatoire. Si on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des permutations de $[n]$ sans pooints fixes, il s'agit de calculer le nombre d'éléments d_n de $\mathcal{D}_n$.
   En utilisant un argument d'inclusion-exclusion, on peut en déduire la formule explicite suivante :

   $$d_n = n! - n(n-1)! + C_2^n(n-2)! - \ldots + (-1)^n C_n^n 0! = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

   à partir de laquelle on obtient le résultat asymptotique bien connu :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

   Une interprétation de ce résultat est que la probabilité qu'une permutation choisie uniformément parmi toutes les permutations soit un dérangement est asymptotiquement égale à $1/e$.

3. Dix chevaux prennent le départ lors d'une course. Bien que je ne connaisse strictement rien aux chevaux, je décide cependant de jouer au tiercé. Quelle est la probabilité de gagner dans l'ordre ? Est-ce beaucoup plus facile de gagner dans le désordre ?

– *dans l'ordre* :

J'ai 1 chance sur 10 de trouver le vainqueur, 1 chance sur 9 de trouver le deuxième et 1 chance sur 8 de trouver le troisième. Cela fait donc 1 chance sur 720 ($10 \times 9 \times 8 = 720$) de trouver le tiercé dans l'ordre.

– *dans le désordre* :

Le nombre de façons de choisir un groupe de 3 chevaux pris parmi 10 est égal à : $C_3^{10} = \frac{10!}{7!3!} = 120$.

J'ai donc 1 chance sur 120 de trouver le groupe des 3 chevaux gagnants, c'est-à-dire de gagner le tiercé dans l'ordre ou dans le désordre. La probabilité de gagner dans le désordre est donc de : $\frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{5}{720}$.

Il est donc 5 fois plus facile de gagner dans le désordre que dans l'ordre.

Remarque : il est aisé de démontrer que ce facteur 5 est indépendant du nombre de chevaux qui prennent le départ.

Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

Pour finir...

1. J'ai retrouvé mon vieux Meccano. Je construis une grue. Il me faut maintenant une vis et un écrou. Voici justement une pe tite boîte qui contient 3 vis et 4 écrous. J'y prends 2 pièces au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir ainsi satisfaction ?

   Si je commence par trouver une vis (3 fois sur 7), je trouverai 4 fois sur 6 un écrou la fois suivante.
   Si je commence par trouver un écrou (4 fois sur 7), je trouverai 3 fois sur 6 une vis la fois suivante.
   J'aurai donc satisfaction 12 fois sur 42 dans chacun des 2 cas, car : $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$. Ce qui fait en tout 4 fois sur 7.
   Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

2. Demandez à un de vos amis de jouer avec vous au jeu suivant : asseyez-vous face à face autour d'une table. Chacun des 2 joueurs doit initialement cacher ses mains sous cette table. Puis, brusquement, montrer l'une des 2. Si chacun a montré la main droite, que votre partenaire vous donne 3 francs. Qu'il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche. Si, par contre, vous montrez la main droite alors qu'il montre la gauche, donnez-lui 1 franc ; et si, enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4 francs. Cela semble bien honnête et cependant si vous jouez de nom breuses fois à ce jeu avec astuce, vous pouvez être sûr de gagner de l'argent. Comment cela ?

Si vous levez toujours la main droite, votre partenaire lèvera toujours la main gauche et vous perdez 1 F à chaque fois. La méthode astucieuse consiste à jeter discrètement un dé à chaque nouveau coup : si le résultat est 1 ou 2, levez la main gauche, si le résultat est 3, 4 ou 5 levez la droite ; si le résultat est 6, relancez le dé.
En effet, si le partenaire lève la main gauche, votre gain sera en moyenne : $\frac{2}{5} \times 2 + \frac{3}{5} \times (-1) = 0,2\ F$.
S'il lève la droite, vous gagnez : $\frac{2}{5} \times (-4) + \frac{3}{5} \times 3 = 0,2\ F$.
Gain moyen pour 100 parties : $100 \times 0,2 = 20\ F$.
Mais attention, choisissez surtout un partenaire qui n'ait pas lu ce livre !
Remarque : il s'agit là de l'application d'un résultat classique de la théorie des jeux.
Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.

3. Je passe chaque été 10 jours en Louisianne. Et mon chien Poséidon se baigne alors quotidiennement dans les marais où se trouvent encore... des crocodiles. Un panneau interdit les bains en précisant que, d'après les statistiques, 1 bain sur 10 en moyenne se termine en tragédie. Or, voici 7 jours exactement que Poséidon se baigne sans encombre. Quelle est alors la probabilité pour qu'il se fasse dévorer, avant notre retour en France, par ces horribles animaux ?

Probabilité de rester entier pendant 3 bains successifs :

$$0,9^3 = 0,73$$

Probabilité pour que Poséidon se fasse dévorer :

$$1 - 0,73 = 27\ \%$$

Remarque : le fait que Poséidon ait déjà pris 7 bains sans encombre ne change rien à la probabilité pour que le bain suivant se termine tragiquement.
Source : Eurêka. *Faites vos jeux*, Dunod, 2002.