Rentrée CogMaster 2007- 2008

LOGIQUE

exercices

D. Bonnay, M. Cozic, H. Galinon

Logique propositionnelle et logique des prédicats

Exercice 1. *Pour chacune des expressions ci-dessous, dites si c'est une formule du langage propositionnel*

1. $\neg(r \vee \neg p)$
2. $\neg(r \wedge \neg(p))$
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow t)))$
4. $(p \rightarrow (q \vee (r\wedge))))$
5. $(p \vee q \vee r)$

Exercice 2 (Arbres de formation)**.** *Pour chaque expression ci-dessous, dites s'il s'agit d'une formule ; (a) si c'est le cas, construisez son arbre de formation ; (b) sinon, expliquez pourquoi.*

1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $((q \wedge q) \rightarrow (q \vee r) \rightarrow (\neg s \vee t))$
3. $((\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r)$

4. $((((p \to q) \to r) \to s) \to t)$
5. $(p \lor (q \to \neg r))$

Exercice 3 (Tables de vérité)**.** *Construisez les tables de vérités des formules suivantes :*

1. $(\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q))$
2. $(((p \to q) \land (q \to r)) \to (q \lor r))$
3. $((p \to \neg p) \land p)$

Exercice 4 (Le conditionnel)**.** *Trouvez deux exemples d'usage du "si..., ..." dans la langue naturelle qui mettent en difficulté la table de vérité de* $\to$*.*

Exercice 5. *Déterminez, en justifiant votre réponse, si les arguments suivants sont valides :*

1. $\dfrac{((p \to q) \to r)}{(q \to r)}$
2. $\dfrac{((p \land r) \to q)}{(p \to q)}$
3. $\dfrac{((p \land q) \to r) \quad \neg(q \to r)}{\neg p}$

Exercice 6 (Formules tautologiques, antilogiques & neutres)**.** *Dans les affirmations suivantes,* ϕ *et* ψ *sont des formules quelconques ; dites pour chaque affirmation si elle est vrai ou fausse. Vous justifierez votre réponse.*

1. ϕ *est une formule neutre ssi* $\neg\phi$ *est une formule neutre*
2. *si* $(\phi \land \psi)$ *est une antilogie,* ϕ *est une antilogie ou* ψ *est une antilogie*
3. *si* $(\phi \leftrightarrow \psi)$ *est une tautologie,* ϕ *et* ψ *sont des tautologies*

4. *si ϕ est une tautologie et ψ une formule quelconque, alors $(\phi \vee \psi)$ est une tautologie*
5. *si $(\phi \to \psi)$ est une contradiction, alors ϕ est une tautologie et ψ est une contradiction*

Exercice 7 (Paraphrase en LPO)**.** *Symbolisez les énoncés suivants en logique du premier ordre. Vous vous efforcerez de préserver autant de structure logique que possible, et vous préciserez le dictionnaire de symbolisation.*

Exemple :

"Marie aime quelqu'un" $\rightsquigarrow \exists x_1 Amx_1$
Dictionnaire :
Ax_1x_2 *:* x_1 *aime* x_2
M *: Marie*

1. *Jean ne mange rien.*
2. *Jean mange une pomme.*
3. *Les enfants qui parlent trop marchent tard.*
4. *Personne n'apprécie quelqu'un qui a maltraité un enfant.*
5. *Il y a des peines et des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir.*
6. *Les seules peines qui soient un plaisir sont des peines d'amour.*

Exercice 8 (Interprétation et satisfaction)**.** *Soit le langage* $\mathcal{L} = (I, P, N, c_0, c_1)$*. On considère la* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M} = (\mathbb{M} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, I^{\mathcal{M}})$ *o ˘*

- $I^{\mathcal{M}}(I) = \{1,3,5,7,9\}$
- $I^{\mathcal{N}}(P) = \{2,3,5,7\}$
- $I^{\mathcal{N}}(N) = \{0,1,2,3\}$
- $I^{\mathcal{N}}(c_0) = 0$

– $I^{\mathcal{N}}(c_1) = 1$

On note g_i l'assignation qui associe le nombre i $(0 \leq i \leq 10)$ ‡ la variable x.

1. *Par quelles assignations sont respectivement satisfaites les formules (a) $\neg Ix$, (b) $(Px \wedge Nx)$ et (c) $(\neg Ix \vee Px)$?*
2. *Les énoncés suivants sont-ils vrais dans $\mathcal{M}$:*
   - $\forall x(Px \rightarrow Ix)$
   - $\exists x(Nx \wedge Px)$
   - Pc_0
   - Nc_1
   - $\exists x(Px \wedge \neg Ix)$
   - $\exists x(Px \wedge (\neg Ix \wedge \neg Nx))$
3. *Donnez une formule qui est exactement satisfaite par les assignations g_0, g_1, g_2, g_3 et g_9.*

Exercice 9 (Validité en LPO)**.** *Démontrez que les énoncés suivants sont valides :*

1. $\forall x(Px \vee \neg Px)$
2. $((\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \wedge \psi))$
3. $(\forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi)$
4. $(\exists x\phi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi)$

Exercice 10 (LPO avec identité)**.** *On ajoute au langage du premier ordre l'identité, =, dont l'interprétation est fixe : pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, toute paire de termes t_1, t_2 et toute assignation g, $\mathcal{M}, g \vDash t_1 = t_2$ ssi $t_1^{\mathcal{M},g}$ est identique ‡ $t_2^{\mathcal{M},g}$.*

1. *Paraphasez dans ce langage les énoncés suivants ;*
   (a) *Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre.*
   (b) *Hormis Jean, personne n'aime Marie.*
   (c) *Au moins deux personnes aiment Marie.*
   (d) *Il n'y a pas plus d'une personne qui aime Marie.*
   (e) *Il y a exactement trois personnes qui aiment Marie.*
2. *Exhibez une formule* ϕ_n *qui est vraie dans une* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M}$ *ssi* $\mathcal{M}$ *est de cardinalité supérieure ou égale ‡* n.
3. *Exhibez un ensemble de formules* Γ *qui sont simultanément satisfaites vraies dans une* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M}$ *ssi* $\mathcal{M}$ *est de cardinalité infinie.*

Exercice 11 (Monotonie)**.** 1. *Donnez l'interprétation du quantificateur "Au moins deux". Ce quantificateur est-il monotone décroissant ‡ droite ? Monotone croissant ‡ droite ? (donnez des exemples d'énoncés qui illustrent le phénomène)*
2. *Mêmes questions avec "Au plus trois".*
3. *Mêmes questions avec "Exactement cinq"*

Logique et calcul

Exercice 12 (La fonction Successeur est Turing-calculable)**.** *Construire une machine de Turing qui calcule la fonction* $f(x) = x + 1$.

Exercice 13.
- *Construire une machine de Turing qui calcule la fonction constante* $f(x) = 3$.
- *Construire une machine de Turing qui calcule toutes les fonctions constantes à* n *argument et égales à 1.*

Exercice 14 (L'Addition est Turing-calculable)**.** *Construire une machine de Turing qui calcule la fonction* $f(x, y) = x + y$*.*

Exercice 15.
1. *Peut-on construire une machine de Turing qui, démarrée n'importe où sur le ruban, s'arrêtera finalement ssi la bande originale n'était pas vierge ? Si oui la construire, sinon expliquer pourquoi.*
2. *Peut-on construire une machine de Turing qui, démarrée n'importe où sur le ruban s'arrêtera finalement ssi la bande originale était vierge ? Si oui la construire, sinon expliquer pourquoi.*

Exercice 16.
1. *Que fait la Machine de Turing donnée par le graphe de transition n°1 (voir l'annexe en fin du document) ?*
2. *Vérifier que la machine de Turing donnée par le graphe de transition n°2 calcule la multiplication (ie la fonction* $f(x, y) = xy$*).*

Exercice 17. *Construire une Machine de Turing qui calcule la fonction* $min(x, y)$*.*

Exercice 18 (Programme WHILE)**.**
1. *Ecrire un programme WHILE qui calcule la fonction Successeur (!).*
2. *Ecrire un programme WHILE qui calcule la fonction addition.*
3. *Ecrire un programme WHILE qui calcule la multiplication.*
4. *Ecrire un programme WHILE qui calcule l'exponentiation (*x^y*)*

Exercice 19 (Fonction diagonale)**.** *Les machines de Turing sont données par une liste finie d'instructions définies sur un ensemble fini d'états. Il y a donc qu'un nombre dénombrable de Machine de Turing* [1]*. Mais, c'est un*

[1] Toute machine est représentable par une suite finie de symboles, sa table d'instruction, que l'on pourrait à son tour représenter comme une suite finie d'entiers. Mais l'ensemble des suites finies d'entier est dénombrable.

résultat classique de mathématiques ensemblistes, l'ensemble des fonctions des entiers dans les entiers est indénombrable. Il doit donc exister des fonctions des entiers dans les entiers qui ne sont pas calculables par Machine de Turing. Le but de cet exercice est de montrer comment en construire une. Supposons que nous ayons donné une énumération de toutes les toutes les machines de Turing calculant des fonctions unaires, et notons $f_1, f_2, \ldots.$ *l'énumération correspondante des fonctions calculées par ces machines.* [2] *On définit la* fonction diagonale d *de la façon suivante :*

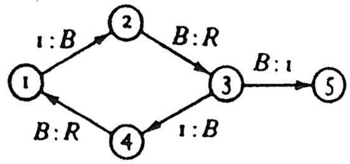
$$d(n) = 2 \text{ si } f_n(n) \text{ est définie est égale à 1,}$$
$$d(n) = 1 \text{ sinon.}$$

Montrez que cette fonction n'est pas Turing-calculable. [Méthode : Supposez qu'elle l'est. Elle est donc égale à une certaine fonction f_m *de l'énumération ci-dessus. Comparez alors* $d(m)$ *et* $f_m(m)$ *et dérivez une contradiction.]*

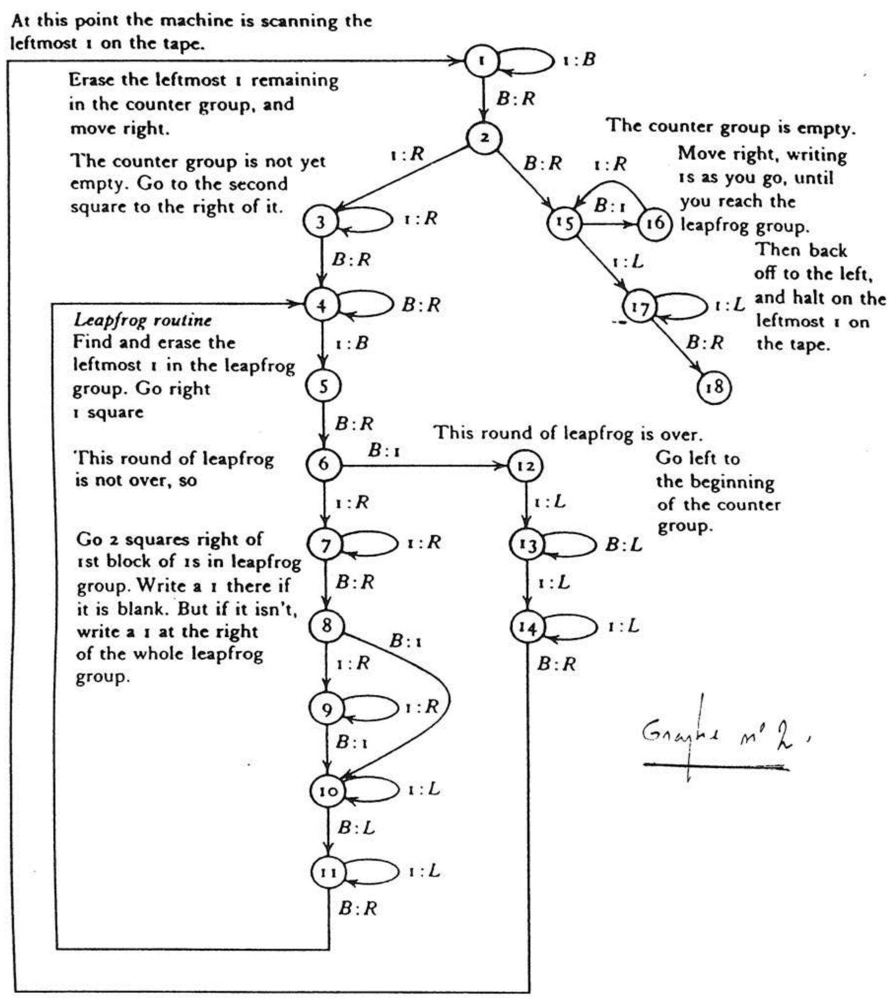
Exercice 20. *Montrer que si une fonction* g *de deux arguments est calculable, alors la fonction unaire* f *définie par* $f(x) = g(x, x)$ *est, elle aussi, calculable.*

[2] Il est possible de donner une telle énumération par un codage effectif des machines dans les suites d'entiers.

Annexe



Graphe n°1.



Graphe n°2.

Figure 3-7. Multiplication machine.