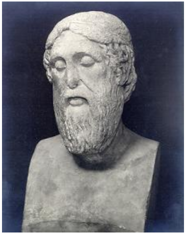
Théories formelles de la rationalité
Bilan : Vérité & Paradoxes

D. Bonnay / M. Cozic / H. Galinon

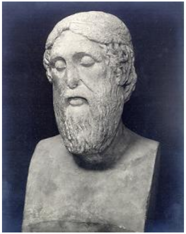
Cogmaster rentrée 2009

Quelques exemples de paradoxes :



(λ) La phrase (λ) n'est pas vraie.

Quelques exemples de paradoxes :



(λ)   La phrase (λ) n'est pas vraie.

Sharon to Sylvester :
I am not a woman you can trust

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

- Donc λ est fausse,

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

- Donc λ est fausse,

mais alors λ n'est pas vraie, comme le dit λ,

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg \mathit{Tr}(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

- Donc λ est fausse,

mais alors λ n'est pas vraie, comme le dit λ, donc λ est vraie.

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg Tr(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

- Donc λ est fausse,

mais alors λ n'est pas vraie, comme le dit λ, donc λ est vraie. Contradiction.

Dérivation du paradoxe (I)

$$(\lambda) : \neg \mathit{Tr}(\lambda)$$

- Si λ est vraie,

alors λ n'est pas vraie, contradiction

- Donc λ est fausse,

mais alors λ n'est pas vraie, comme le dit λ, donc λ est vraie. Contradiction.

Dans les deux cas, on a une contradiction.

Dérivation du paradoxe (II)

$$T\text{-équivalences : } Tr(a) \leftrightarrow \phi$$

quand ‘*a*’ est un nom pour l’énoncé ϕ

Dérivation du paradoxe (II)

$$T\text{-équivalences : } Tr(a) \leftrightarrow \phi$$

quand '*a*' est un nom pour l'énoncé ϕ

En remplaçant a par λ et ϕ par $\neg Tr(\lambda)$, on obtient :

$$\text{Paradoxe du menteur : } Tr(\lambda) \leftrightarrow \neg Tr(\lambda)$$

Dérivation du paradoxe (II)

$$T\text{-équivalences : } Tr(a) \leftrightarrow \phi$$

quand '*a*' est un nom pour l'énoncé ϕ

En remplaçant *a* par λ et ϕ par $\neg Tr(\lambda)$, on obtient :

$$\text{Paradoxe du menteur : } Tr(\lambda) \leftrightarrow \neg Tr(\lambda)$$

Dans une logique *bivalente*,
c'est une contradiction pure et simple,
qui découle uniquement de l'acceptation des T-équivalences.

Logique trivalente (I)

Idée : le menteur n'est *ni vrai ni faux*
Pour capturer cette idée, il faut introduire une troisième valeur de vérité *I* telle qu'on peut avoir $||\phi|| = ||\neg\phi|| =$ *I*

ϕ	$\neg\phi$
T	F
I	I
F	T

Logique trivalente (II)

On peut étendre l'idée aux autres connecteurs logiques :

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	I	
T	F	F
I	T	
I	I	
I	F	
F	T	F
F	I	
F	F	F

Logique trivalente (II)

On peut étendre l'idée aux autres connecteurs logiques :

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	I
F	T	F
F	I	I
F	F	F

Le problème

Comment définir l'extension du prédicat de vérité ?

On cherche à définir

- E=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = T\}$
- A=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = F\}$

Le problème

Comment définir l'extension du prédicat de vérité ?

On cherche à définir

- E=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = T\}$
- A=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = F\}$

Contraintes :

- On veut $||\phi|| = ||Tr(`\phi')||$ pour tout ϕ (*condition T*)

Le problème

Comment définir l'extension du prédicat de vérité ?

On cherche à définir

- E=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = T\}$
- A=$\{\phi \ / \ ||Tr(\phi) = F\}$

Contraintes :

- On veut $||\phi|| = ||Tr(`\phi')||$ pour tout ϕ (*condition T*)
- On sait dire ce qu'il en est au moins pour certains énoncés :
  soit $\psi =$"La neige est blanche"
  - $||Tr(`\psi')|| = T$
  - $||Tr(`Tr(`\psi''))|| = T$
  - et ainsi de suite

La construction de Kripke

On se donne un langage $\mathcal{L}$ interprété auquel on ajoute un prédicat de vérité, on obtient $\mathcal{L}^*$. Spécifier E et A suffit à spécifier la vérité ou la fausseté de tous les énoncés de $\mathcal{L}^*$.

La construction de Kripke

On se donne un langage $\mathcal{L}$ interprété auquel on ajoute un prédicat de vérité, on obtient $\mathcal{L}^*$. Spécifier *E* et *A* suffit à spécifier la vérité ou la fausseté de tous les énoncés de $\mathcal{L}^*$.

Pour ψ un énoncé de $\mathcal{L}^*$, on note $\langle A, E \rangle \vDash^+ \psi$ si ψ est vrai, $\langle A, E \rangle \vDash^- \psi$ si ψ est faux.

La construction de Kripke

On se donne un langage $\mathcal{L}$ interprété auquel on ajoute un prédicat de vérité, on obtient $\mathcal{L}^*$. Spécifier E et A suffit à spécifier la vérité ou la fausseté de tous les énoncés de $\mathcal{L}^*$.

Pour ψ un énoncé de $\mathcal{L}^*$, on note $\langle A, E\rangle \vDash^+ \psi$ si ψ est vrai, $\langle A, E\rangle \vDash^- \psi$ si ψ est faux.

On définit l'opérateur J qui a comme argument une paire $\langle A, E\rangle$ et comme valeur une paire de la même forme $\langle A, E\rangle$.

$$J(\langle A, E\rangle) = \langle\{\phi \;/\; \langle A, E\rangle \vDash^+ \phi\}, \{\phi \;/\; \langle A, E\rangle \vDash^- \phi\}\rangle$$

La construction de Kripke

On se donne un langage $\mathcal{L}$ interprété auquel on ajoute un prédicat de vérité, on obtient $\mathcal{L}^*$. Spécifier E et A suffit à spécifier la vérité ou la fausseté de tous les énoncés de $\mathcal{L}^*$.

Pour ψ un énoncé de $\mathcal{L}^*$, on note $\langle A, E \rangle \models^+ \psi$ si ψ est vrai, $\langle A, E \rangle \models^- \psi$ si ψ est faux.

On définit l'opérateur J qui a comme argument une paire $\langle A, E \rangle$ et comme valeur une paire de la même forme $\langle A, E \rangle$.

$$J(\langle A, E \rangle) = \langle \{\phi \mathbin{/} \langle A, E \rangle \models^+ \phi\}, \{\phi \mathbin{/} \langle A, E \rangle \models^- \phi\} \rangle$$

Si on part de $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$, J nous donne la construction étape par étape de l'extension et de l'anti-extension du prédicat de vérité.

Definition

On appelle point fixe de J les paires $\langle X, Y \rangle$ telles que $J(\langle X, Y \rangle) = \langle X, Y \rangle$

$\langle X, Y \rangle$ est un point fixe de J ssi la condition (T) est satisfaite

Theorem

Si les opérateurs logiques trivalents ont de bonnes propriétés,
alors J a un point fixe,
et en particulier J a un plus petit point fixe.