La théorie de la décision

Cogmaster, rentrée 2011

Mikaël Cozic (resp. CO8)
mikael.cozic@ens.fr

Université Paris-Est Créteil, IHPST & DEC

Introduction

la théorie de la décision

- théorie de la décision : théorie formelle des choix
- domaine exploré et appliqué par les économistes, les philosophes et les psychologues

la théorie de la décision

- théorie de la décision : théorie formelle des choix
- domaine exploré et appliqué par les économistes, les philosophes et les psychologues
- explication naïve (*folk explanation*) de l'action :

  Pierre a choisi CO8 parce qu'il désire une excellente introduction à la théorie de la décision et croit que CO8 fournit une excellente introduction à la théorie de la décision

  - l'action est expliquée en termes d'états mentaux : des croyances et des désirs

la théorie de la décision

- théorie de la décision : théorie formelle des choix
- domaine exploré et appliqué par les économistes, les philosophes et les psychologues
- explication naïve (*folk explanation*) de l'action :

  Pierre a choisi CO8 parce qu'il désire une excellente introduction à la théorie de la décision et croit que CO8 fournit une excellente introduction à la théorie de la décision

  - l'action est expliquée en termes d'états mentaux : des croyances et des désirs
- la théorie de la décision représente (i) les actions, (ii) les états mentaux, (iii) la façon dont les états mentaux se combinent pour engendrer le choix

la théorie bayésienne

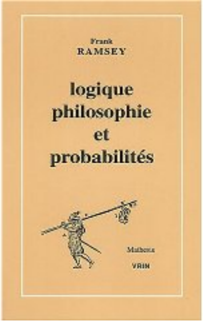
- aujourd'hui (et dans une bonne partie de C08/CA8), la théorie de référence = théorie bayésienne de la décision (TB)
- la théorie bayésienne reçoit des interprétations normatives (comment les gens doivent agir) et descriptives (comment ils agissent)

la théorie bayésienne

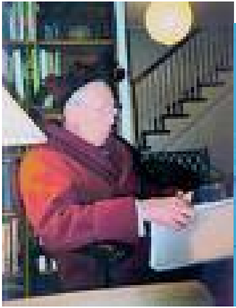
- aujourd'hui (et dans une bonne partie de C08/CA8), la théorie de référence = théorie bayésienne de la décision (TB)
- la théorie bayésienne reçoit des interprétations normatives (comment les gens doivent agir) et descriptives (comment ils agissent)
- 2 idées centrales dans la TB :

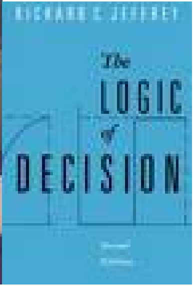
1. les croyances et les désirs viennent par degrés
2. les choix résultent d'une combinaison des degrés de croyances et de désirs, exprimée par le critère d'espérance d'utilité

Ramsey, “Truth and Probability”, 1926



Jeffrey, *The Logic of Decision*, 1965/1983





La théorie bayésienne de la décision

une situation de décision

- analyse d'une situation de décision: (1) actions, (2) états de la nature (ou événements) et (3) conséquences

une situation de décision

- analyse d'une situation de décision: (1) actions, (2) états de la nature (ou événements) et (3) conséquences
- exemple: vin rouge ou vin blanc ?

	poulet	viande
vin rouge	vin rouge avec poulet	vin rouge avec viande
vin blanc	vin blanc avec poulet	vin blanc avec viande

- le choix de Pierre dépend de son jugement sur la probabilité de poulet vs. viande (états de la nature) et de la manière dont il désire les 4 conséquences possibles
- les croyances portent sur les états de la nature (ou événements), les désirs sur les conséquences

l'espérance d'utilité

- les croyances sont représentées par une distribution de probabilité, les désirs par une fonction d'utilité

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

l'espérance d'utilité

- les croyances sont représentées par une distribution de probabilité, les désirs par une fonction d'utilité

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

- distribution de probabilité ?

l'espérance d'utilité

- les croyances sont représentées par une distribution de probabilité, les désirs par une fonction d'utilité

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

- distribution de probabilité ? $\approx$ assignation d'un nombre $0 \leq P(s) \leq 1$ à chaque état s tel que la somme égale 1 $(\sum_{s \in S} P(s) = 1)$

l'espérance d'utilité

- les croyances sont représentées par une distribution de probabilité, les désirs par une fonction d'utilité

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

- distribution de probabilité ? $\approx$ assignation d'un nombre $0 \leq P(s) \leq 1$ à chaque état s tel que la somme égale 1 $(\sum_{s \in S} P(s) = 1)$
- fonction d'utilité ?

l'espérance d'utilité

- les croyances sont représentées par une distribution de probabilité, les désirs par une fonction d'utilité

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

- distribution de probabilité ? $\approx$ assignation d'un nombre $0 \leq P(s) \leq 1$ à chaque état s tel que la somme égale 1 ($\sum_{s \in S} P(s) = 1$)
- fonction d'utilité ? $\approx$ assignation d'un nombre $u(c) \in \mathbb{R}$ à chaque conséquence c

l'espérance d'utilité, cont.

- l'espérance d'utilité est un critère de décision qui combine distribution de probabilité et fonction d'utilité :

	poulet 1/2	viande 1/2
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

vin blanc	1.(1/2) + - 1.(1/2) = 0
vin rouge	0.(1/2) + 1.(1/2) = 1/2

- Pierre préfère le vin rouge au vin blanc et choisit le vin rouge plutôt que le vin blanc

sensibilité aux croyances

- supposons que Jean ait des croyances différentes:

	poulet 3/4	viande 1/4
vin blanc	1	- 1
vin rouge	0	1

- alors les préférences (et les choix) de Jean seront différentes de celles de Pierre:

vin blanc	1.(3/4) + - 1.(1/4) = 1/2
vin rouge	0.(3/4) + 1.(1/4) = 1/4

utilités équivalentes

- on peut bien sûr faire la même remarque pour les utilités

utilités équivalentes

- on peut bien sûr faire la même remarque pour les utilités
- il existe des paires de fonctions d'utilité tq elles donnent nécessairement le même résultat quand on utilise l'espérance d'utilité:

	poulet 3/4	viande 1/4
vin blanc	3	- 3
vin rouge	0	3

$$EU_2(b) = 3.u_1(bp).3/4 + 3.u_1(bv).1/4 = 3.EU_1(b)$$

utilités équivalentes

- on peut bien sûr faire la même remarque pour les utilités
- il existe des paires de fonctions d'utilité tq elles donnent nécessairement le même résultat quand on utilise l'espérance d'utilité:

	poulet 3/4	viande 1/4
vin blanc	3	- 3
vin rouge	0	3

$$EU_2(b) = 3.u_1(bp).3/4 + 3.u_1(bv).1/4 = 3.EU_1(b)$$

	poulet 3/4	viande 1/4
vin blanc	3	- 1
vin rouge	0	3

utilités équivalentes

- les fonctions d'utilité u_1, $u_2 = 3 \cdot u_1$ et $u_3 = 2 \cdot u_1 + 1$ sont équivalentes, du point de vue de l'espérance d'utilité, quelles que soient les probabilités

utilités équivalentes

- les fonctions d'utilité u_1, $u_2 = 3 \cdot u_1$ et $u_3 = 2 \cdot u_1 + 1$ sont équivalentes, du point de vue de l'espérance d'utilité, quelles que soient les probabilités
- toute transformation affine strictement croissante d'une fonction d'utilité engendre par espérance d'utilité les mêmes préférences
- les fonctions d'utilité équivalentes sont indiscernables du point de vue de la TB
- il y a donc une part de convention dans les utilités du point de vue de la TB. La fixation du 0 et du 1 est conventionnelle.
- comparaison avec les échelles de température : F = 9/5.C + 32

La mesure des états mentaux

l'accès aux états mentaux

- problème : nous avons fait *comme si* l'on avait accès au degrés de croyances et aux utilités, mais comment (en principe du moins) les mesure-t-on ?

l'accès aux états mentaux

- problème : nous avons fait *comme si* l'on avait accès au degrés de croyances et aux utilités, mais comment (en principe du moins) les mesure-t-on ?
- proposition 1 : on peut les demander aux agents, lequel les connaîtrait par introspection

  "...le degré de croyance est quelque chose de perceptible son possesseur, càd que les croyances diffèrent par l'intensité d'un sentiment qui les accompagne, que nous pourrions appeler un sentiment-de-croyance..." (Ramsey, 1926)

l'accès aux états mentaux

- objection : “Cette manière de voir ne conviendrait cependant pas du tout parce qu'il n'est pas facile d'assigner des nombres à des intensités de sentiment. Même cela mis à part, ça me semble visiblement faux puisque les croyances auxquelles on tient le plus fortement ne sont souvent accompagnées d'aucun sentiment que ce soit” (Ramsey, 1926)

l'accès aux états mentaux

- objection : "Cette manière de voir ne conviendrait cependant pas du tout parce qu'il n'est pas facile d'assigner des nombres à des intensités de sentiment. Même cela mis à part, ça me semble visiblement faux puisque les croyances auxquelles on tient le plus fortement ne sont souvent accompagnées d'aucun sentiment que ce soit" (Ramsey, 1926)
- proposition 2 : on peut inférer les croyances et les utilités à partir de préférences (ou de choix) constatées

"...le degré de croyance est une propriété causale de la croyance, qu'on peut vaguement définir comme étant la propension à agir sur la base de cette croyance." (R 1926)

inférer les probabilités

- supposons que les utilités soient connues:

	brouillard p	pas de brouillard 1 - p
train	7	7
avion	0	12

inférer les probabilités

- supposons que les utilités soient connues:

	brouillard p	pas de brouillard 1 - p
train	7	7
avion	0	12

- supposons en outre que Pierre soit indifférent entre le train et l'avion ; alors
  $7 = 12 - 12p$
  $p = 5/12$
- avec une préférence stricte (disons train $\succ$ avion), on aurait simplement pu conclure
  $p > 5/12$

inférer les utilités

- trois conséquences : thon $\succ$ jambon $\succ$ oeuf. On veut connaître l'utilité du jambon relativement à l'intervalle $[u(\text{oeuf}), u(\text{thon})] = [0, 1]$

inférer les utilités

- trois conséquences : thon $\succ$ jambon $\succ$ oeuf. On veut connaître l'utilité du jambon relativement à l'intervalle $[u(\text{oeuf}), u(\text{thon})] = [0, 1]$
- pour un événement E de probabilité connue p, on s'intéresse aux actes a_1, a_2 tq

	E p	$\neg E$ 1 - p
a_1	thon	oeuf
a_2	jambon	jambon

inférer des utilités

	E p	$\neg E$ 1 - p	EU
a_1	1	0	p
a_2	x	x	x

- quand p est forte, Pierre préfère a_1 : $p > x$
- quand p est faible, Pierre préfère a_2 : $p < x$
- on peut proposer par alternance des p moins fortes et moins faibles ; on obtient alors une estimation de plus en plus précise de x
- avec un jeu de 52 cartes, on peut estimer l'utilité du jambon à 1/52 près
- si $a_1 \sim a_2$, alors $x = p$ et on infère donc l'utilité de jambon !

inférer les probabilités et les utilités ?

- question : est-ce qu'on a réglé le problème de départ (l'accès aux états mentaux) ?
- pas vraiment ! on a montré comment

  • inférer (parfois) les probabilités quand on connaît préférences (ou choix) et utilités
  • inférer (en général) les utilités quand on connaît préférences (ou choix) et probabilités

inférer les probabilités et les utilités ?

- question : est-ce qu'on a réglé le problème de départ (l'accès aux états mentaux) ?
- pas vraiment ! on a montré comment

  • inférer (parfois) les probabilités quand on connaît préférences (ou choix) et utilités
  • inférer (en général) les utilités quand on connaît préférences (ou choix) et probabilités

- mais comment faire quand on ne dispose que des préférences (ou des choix) ? comment faire pour révéler simultanément les deux facteurs responsables des préférences (ou des choix), les croyances et les désirs ?

inférer les probabilités et les utilités ?

- l'un des principaux titres de gloire de Ramsey 1926 : une méthode pour résoudre le problème de la révélation simultanée des croyances et des désirs
- la solution de Ramsey repose sur la notion de proposition éthiquement neutre - ou, pour nous, d'événement éthiquement neutre
- une proposition E est une p.e.n. ssi sa vérité n'est pas un objet de désirs ssi pour toute conséquence c, Pierre est indifférent entre c alors que E et c alors que $\neg E$

inférer les probabilités et les utilités ?

- l'un des principaux titres de gloire de Ramsey 1926 : une méthode pour résoudre le problème de la révélation simultanée des croyances et des désirs
- la solution de Ramsey repose sur la notion de proposition éthiquement neutre - ou, pour nous, d'événement éthiquement neutre
- une proposition E est une p.e.n. ssi sa vérité n'est pas un objet de désirs ssi pour toute conséquence c, Pierre est indifférent entre c alors que E et c alors que $\neg E$
- exemple :
  - thon $\succ$ jambon, fromage $\succ$ oeuf si pas vendredi
  - thon $\succ$ fromage $\succ$ oeuf $\succ$ jambon si vendredi

» le fait d'être vendredi n'est pas une p.e.n. relativement aux conséquences

p.e.n. au degré 1/2

- si Pierre obéit à l'EU, alors on peut "lire" dans ses préférences s'il croit une p.e.n. E au degré 1/2

	E p	$\neg E$ 1 - p	EU
a_1	c_1	c_2	$p.u(c_1) + (1 - p).u(c_2)$
a_2	c_2	c_1	$p.u(c_2) + (1 - p).u(c_1)$

- si Pierre est indifférent entre $a_1 = [c_1$ si E, c_2 sinon$]$ et $a_2 = [c_2$ si E, c_1 sinon$]$, alors on peut en conclure que $p = 1/2$
- Pierre juge que la pièce est non-biaisée s'il est indifférent entre parier 10 euros sur pile et parier 10 euros sur face

calibration

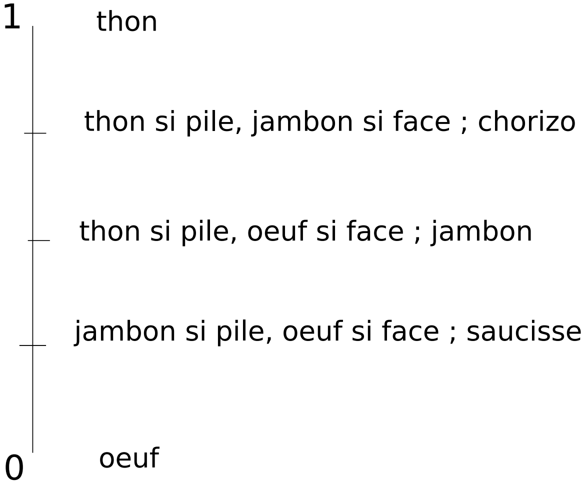
- avec une p.e.n. de proba 1/2 E, on peut calibrer une echelle d'utilité entre $u(a) = 1$ (par hypo. la meilleure conséquence) et $u(b) = 0$ (la pire conséquence)
- le milieu de l'intervalle correspond à l'action [a si E, b sinon]

calibration

- avec une p.e.n. de proba 1/2 E, on peut calibrer une echelle d'utilité entre $u(a) = 1$ (par hypo. la meilleure conséquence) et $u(b) = 0$ (la pire conséquence)
- le milieu de l'intervalle correspond à l'action [a si E, b sinon]
- supposons que Pierre soit indifférent entre [c à coup sûr] et [a si E, b sinon] ; $u(c) = 1/2$

  - le point 1/4 correspond à l'option [c si E, b sinon]
  - le point 3/4 correspond à l'option [a si E, c sinon]

calibration



inférer les probabilités

- nous n'avons fait que la moitié du chemin : on ne sait pas comment révéler les probabilités
- Si l'on dispose de $u(c_1)$, $u(c_2)$, et $u(c_3)$, si l'agent maximise son espérance d'utilité, alors
  $EU([c_1 \text{ avec certitude}]) = u(c_1)$
  $EU([c_2 \text{ si } E, c_3 \text{ sinon}]) = P(E) \times u(c_2) + 1 - P(E) \times u(c_3)$

inférer les probabilités

- nous n'avons fait que la moitié du chemin : on ne sait pas comment révéler les probabilités
- Si l'on dispose de $u(c_1)$, $u(c_2)$, et $u(c_3)$, si l'agent maximise son espérance d'utilité, alors
  $EU([c_1 \text{ avec certitude}]) = u(c_1)$
  $EU([c_2 \text{ si } E, c_3 \text{ sinon}]) = P(E) \times u(c_2) + 1 - P(E) \times u(c_3)$
- Si Pierre est indifférent entre $[c_1$ avec certitude$]$ et $[c_2$ si E, c_3 sinon$]$, alors
  $u(c_1) = P(E) \times u(c_2) + 1 - P(E) \times u(c_3)$

$$\boxed{P(E) = (u(c_1) - u(c_3))/(u(c_2) - u(c_3))}$$

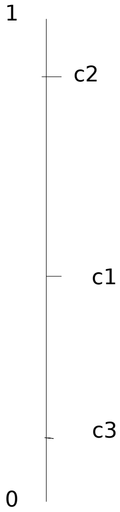
inférer les probabilités

- $\boxed{P(E) = (u(c_1) - u(c_3))/(u(c_2) - u(c_3))}$
- l'utilité de c_1 est "entre" celle de c_2 et celle de c_3 (puisque indifférence)
- proba de E = rapport entre l'incrément d'utilité quand on passe de c_3 à c_1 et l'incrément d'utilité quand on passe de c_3 à c_2 - toujours positif et inf. à 1

inférer les probabilités

- $$\boxed{P(E) = (u(c_1) - u(c_3))/(u(c_2) - u(c_3))}$$
- l'utilité de c_1 est "entre" celle de c_2 et celle de c_3 (puisque indifférence)
- proba de E = rapport entre l'incrément d'utilité quand on passe de c_3 à c_1 et l'incrément d'utilité quand on passe de c_3 à c_2 - toujours positif et inf. à 1
- intuitivement, plus le rapport est grand, plus il faut que $P(E)$ soit élevée - si $u(c_2)$ est à peine plus grande que $u(c_1)$ donc si le rapport d'incrément est très élevé, il faut que la $P(E)$ soit proche de 1
- on peut vérifier que $P(.)$ ainsi défini obéit aux lois des probabilités

calibration



vivre, c'est parier !

- la méthode de Ramsey repose sur des options du type [*a* si *E*, *b* sinon] = des paris

"[la méthode de mesure] est basée, fondamentalement, sur le pari, mais cela ne semble pas déraisonnable dès lors qu'on remarque qu'il semble que toute notre vie durant, nous ne faisons, en un sens, que parier. Chaque fois que nous allons à la gare nous parions qu'un train est vraiment en partance, et si notre degré de croyance en cela n'était pas suffisant, nous refuserions le pari et resterions à la pari." (R 1926)

Perspectives

les propriétés des préférences

- la méthode de Ramsey repose sur un certain nombre d'hypothèses:

ex. 1 il existe une p.e.n. de probabilité 1/2 [axiome 1]

ex. 2 si E est une p.e.n. et a, b, c, d des conséquences, [a si E, b sinon] $\sim$ [b si E, a sinon], alors il est également vrai que [c si E, d sinon] $\sim$ [d si E, c sinon]

ex. 3 si E est une p.e.n. de probabilité 1/2 et a, b des conséquences, alors il existe une conséquence c tq $c \sim$ [a si E, b sinon] [axiome 6]

l'analyse axiomatique

- en théorie de la décision, l'analyse théorique consiste en bonne partie à dégager

1. des propriétés des préférences qui valent nécessairement si le modèle de décision est correct (ex: transitivité)
2. des propriétés des préférences qui permettent à coup sûr de les “expliquer” grâce au modèle de décision voire de mesurer les croyances et les désirs

- ces propriétés sont nommées axiomes et l'on parle d'axiomatisation

l'analyse axiomatique

- les axiomes permettent en outre d'évaluer le modèle de décision

1. du point de vue descriptif : on peut tester le modèle en regardant si les préférences des individus se conforment aux axiomes
2. du point de vue normatif : on peut évaluer l'attrait normatif du modèle en évaluant l'attrait normatif des axiomes

Allais Paradox

- Choice 1:
  a_1: (1M, 1)
  a_2: (1M, 0.89 ; 5M, 0.10 ; 0, 0.01)

Allais Paradox

- Choice 1:
  a_1: (1M, 1)
  a_2: (1M, 0.89 ; 5M, 0.10 ; 0, 0.01)
- Choice 2:
  a_3: (5M, 0.10 ; 0, 0.9)
  a_4: (1M, 0.11 ; 0,0.89)

l'analyse axiomatique

- une application normative importante: il suit des axiomes et de la méthode de mesure que les degrés de croyances d'un agent qui obéit aux axiomes obéissent aux lois des probabilités

  » les degrés de croyance d'un agent rationnel obéissent aux probabilités (cf. Dutch Book)
- théorie bayésienne du raisonnement inductif (théorie de la confirmation, etc.)

durant CO8...

- durant la première moitié du cours...

1. nous donnerons la version moderne, standard, de la théorie de la décision
2. nous l'étudierons théoriquement (axiomatique) et empiriquement

- durant la seconde moitié, nous (en fait, G. Hollard) aborderons les situations d'interactions entre agents » théorie des jeux

Le paradoxe des deux enveloppes

- Deux enveloppes, A et B ; l'une contient le double de l'autre
- On offre à Pierre l'enveloppe A ; mais avant qu'il ne l'ouvre pour en prendre le contenu, on lui propose le choix suivant : ou bien garder l'enveloppe A, ou bien échanger avec l'enveloppe B

Le paradoxe des deux enveloppes

- Deux enveloppes, A et B ; l'une contient le double de l'autre
- On offre à Pierre l'enveloppe A ; mais avant qu'il ne l'ouvre pour en prendre le contenu, on lui propose le choix suivant : ou bien garder l'enveloppe A, ou bien échanger avec l'enveloppe B
- Premier raisonnement : soit x la somme contenue dans l'enveloppe A. L'enveloppe B contient donc ou bien $2x$ ou bien $x/2$. Les deux possibilités sont équiprobables.
  - par hypothèse, la valeur de A est x
  - par application de l'espérance de gain, la valeur de B est V(B) = $(1/2.2x)+(1/2.x/2)= 1.25\ x$
  - donc **il faut choisir B plutôt que A**

- Conclusion étrange : A et B sont à l'origine dans une situation symétrique. Le plus étonnant reste à venir...

- Conclusion étrange : A et B sont à l'origine dans une situation symétrique. Le plus étonnant reste à venir...
- Second raisonnement : soit y la somme contenue dans l'enveloppe B. L'enveloppe A contient donc ou bien $2y$ ou bien $y/2$. Les deux possibilités sont équiprobables.
  - par hypothèse, la valeur de B est y
  - par application de l'espérance de gain, la valeur de A est $V(A) = (1/2.2y)+(1/2.y/2)= 1.25\ y$
  - donc **il faut choisir A plutôt que B** !!!

- Conclusion étrange : A et B sont à l'origine dans une situation symétrique. Le plus étonnant reste à venir...
- Second raisonnement : soit y la somme contenue dans l'enveloppe B. L'enveloppe A contient donc ou bien $2y$ ou bien $y/2$. Les deux possibilités sont équiprobables.
  - par hypothèse, la valeur de B est y
  - par application de l'espérance de gain, la valeur de A est $V(A) = (1/2.2y)+(1/2.y/2)= 1.25\ y$
  - donc **il faut choisir A plutôt que B** !!!
- Le même principe, l'espérance de gain, nous conduit à deux conclusions diamétralement différentes